

1. א. מצא את המחלק המשותף הגדול ביותר d של המספרים 161, 119.
 ב. מצא מספרים שלמים x, y שמקיימים את המשוואה $161x + 119y = d$.

$$161 = 1 \cdot 119 + 42 \Rightarrow 42 = 1 \cdot 161 + (-1) \cdot 119$$

$$119 = 2 \cdot 42 + 35 \Rightarrow 35 = 1 \cdot 119 + (-2) \cdot 42$$

$$42 = 1 \cdot 35 + 7 \Rightarrow 7 = 1 \cdot 42 + (-1) \cdot 35$$

$$35 = 5 \cdot 7 + 0$$

מכאן נובע ש- $d = \gcd(161, 119) = 7$.

$$42 = 1 \cdot 161 + (-1) \cdot 119$$

$$35 = 1 \cdot 119 + (-2) \cdot 42$$

$$7 = 1 \cdot 42 + (-1) \cdot 35$$

מכאן נובע ש:

$$\left. \begin{array}{l} 35 = 1 \cdot 119 + (-2) \cdot 42 \\ 7 = 1 \cdot 42 + (-1) \cdot 35 \end{array} \right\} \Rightarrow 7 = 1 \cdot 42 + (-1) \cdot (1 \cdot 119 + (-2) \cdot 42) = 3 \cdot 42 + (-1) \cdot 119.$$

$$\left. \begin{array}{l} 7 = 3 \cdot 42 + (-1) \cdot 119 \\ 42 = 1 \cdot 161 + (-1) \cdot 119 \end{array} \right\} \Rightarrow 7 = 3 \cdot (1 \cdot 161 + (-1) \cdot 119) + (-1) \cdot 119 = 3 \cdot 161 + (-4) \cdot 119$$

2. תהי קבוצה $G = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0, x \neq 1\}$.

א. הוכח שהיא חבורה ביחס לפעולה $x * y := x^{\ln y}$.

ב. האם היא חבורה קומוטטיבית? נמק.

חלק א'.

A. סגירות.

מהגדרת הפעולה מקבלים $x * y = x^{\ln y} > 0$ ונשאר להוכיח ש $x^{\ln y} \neq 1$.

אם $x^{\ln y} = 1$ אז

$$\ln(x^{\ln y}) = 0 \Rightarrow \ln y \ln x = 0 \Rightarrow (\ln x = 0 \vee \ln y = 0) \Rightarrow (x = 1 \vee y = 1)$$

סתירה. לכן $x * y = x^{\ln y} \neq 1$ יחד עם $x * y > 0$ אנו מקבלים $x * y \in G$.

B. אסוציאטיביות.

$$(y * z)^{\ln x} = (y^{\ln z})^{\ln x} = (x^{\ln y \ln z})^{\ln x} = x^{\ln y \ln z \ln x}$$

$$x * (y * z) = x * y^{\ln z} = x^{\ln(y^{\ln z})} = x^{\ln z \ln y}$$

מהשוויון $\ln y \ln z = \ln z \ln y$ נובע ש- $(x * y) * z = x * (y * z)$.

C. קיום איבר היחידה.

נסמן את איבר היחידה ב- e . אז $x * e = x$ ו- $e * x = x$ מונקיים לכן $e \in G$ ולכן

$$x * e = x \Rightarrow x^{\ln e} = x \Rightarrow x^1 = x \Rightarrow e = 1$$